SOLUÇÕES

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Licenciatura MAEG

Época Normal – 3 de Junho de 2019

I

a) $I =]1,3]$**.** No ponto $x=1$ aplica-se o corolário ao Critério Geral da Comparação usando a série harmónica, e no ponto $x=3$ aplica-se o critério de Leibniz.

b) $\varepsilon = \frac{3}{2}$, I não é compacto pois apesar de ser um conjunto limitado não é fechado.

II

a)
$$\begin{aligned} D_f &= \left\{(x,y)\in\Re^2 : y\neq 0 \wedge \log\sqrt{x^2+1}\neq 0 \wedge \sqrt{x^2+1}>0 \wedge x^2+1\geq 0\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\Re^2 : x\neq 0 \wedge y\neq 0\right\} \end{aligned}$$

$A=\left\{(x,y)\in\Re^2 : e^{\left|\frac{x}{y}\right|-1}-1\leq 0 \wedge x\neq 0 \wedge y\neq 0\right\}$, observe-se que o denominador é sempre positivo com $x\neq 0$. Assim, $A=\left\{(x,y)\in\Re^2 : \left|\frac{x}{y}\right|\leq 1 \wedge x\neq 0 \wedge y\neq 0\right\}$.

b) V, $(0,0)\in frA$.

III

1. **a)** $D_f = \left\{(x,y)\in\Re^2 : x\geq 0 \wedge y>0\right\}$.

$f_x'(0,a)_{a>0} = \begin{cases} 0 & \text{se } a=1 \\ \infty & \text{se } a\neq 1 \end{cases}$, e $f_y'(0,a)_{a>0}=0$. Logo, apenas existe vector gradiente em pontos de abcissa nula se a ordenada for *1* e nesse caso tem-se $\nabla f(0,1)=(0,0)$.

b) $f(3.99{,}1.05)= f((4{,}1)+(-0.01{,}0.05))\approx f(4{,}1)+\nabla f(4{,}1)\cdot(-0.01{,}0.05)=0.1.$

2. A função g é diferenciável em $\Re^3$ pois as suas funções coordenadas são funções reais diferenciáveis em $\Re^3$.

$$D_{(2,0,3)}g(1,1,\pi)=J_g(1,1,\pi).\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\pi & \pi-1 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\pi+3\\3\\2\end{bmatrix}.$$

IV

Por hipótese $\dfrac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial\psi}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial\psi\partial\varphi}=0$.

$$\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial y}=2yf_{\varphi}^{'}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=2f_{\varphi}^{'}+2y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial\psi\partial\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=2f_{\varphi}^{'}+4y^2 f_{\varphi^2}^{''}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-2x\frac{\partial f}{\partial\varphi}+3x^2\frac{\partial f}{\partial\psi}\right)=-2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial\psi\partial\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+$$
$$+3x^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial\psi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial\psi^2}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=-4xyf_{\varphi^2}^{''}$$

Deste modo, $\dfrac{\partial h}{\partial y}-y\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}-\dfrac{y^2}{x}\dfrac{\partial^2 h}{\partial y\partial x}=0$ c.q.d.

V

a) $\nabla f(x,y)=(0{,}0)\Leftrightarrow\begin{cases}2xe^{x-y}+x^2e^{x-y}=0\\-x^2e^{x-y}-3y^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\vee\begin{cases}x=-2\\-4e^{-2-y}-3y^2=0_{c.imp.}\end{cases}.$

Único ponto crítico é $(0{,}0)$ $\forall_{a\in\Re}$.

b) Por definição, o ponto $(0{,}0)$ é um ponto de sela da função se é um ponto crítico, o que ficou provado na alínea anterior, e se não é um extremante, isto é $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{b,c\in B_\varepsilon((0,0))}\ f(b)<f(0{,}0)=1<f(c)$.

$f(0,h)_{h\neq 0} = 1-h^3 : \begin{cases} <1 \text{ se } h>0 \\ >1 \text{ se } h<0 \end{cases}$. Assim provámos que $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{(0,h):|h|<\varepsilon}\ \ f(0,h)_{h>0} < f(0,0) < f(0,h)_{h<0}$, o que conclui a prova de que o ponto $(0,0)$ é um ponto de sela da função.

VI

Por hipótese $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} e^u \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial u}{\partial x} e^u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}\left(1+e^{2u}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial u}{\partial x} e^u \end{cases} \underset{e^{2u}\neq -1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$, ou seja u deverá ser constante. Assim, $f = C + ie^C$ com $C \in \Re$.